Boğaziçi Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Programı Giriş Sınavı
Saat: 9:00 – 12:00

İsim: ____________________

BÖLÜM A: Aşağıdaki dört sorudan sadece **iki** tanesini cevaplayın.

A 1 Aşağıdaki ifadelerin herbirisinin yakınsak mı ıraksak mı olduğunu belirleyin. Cevabınızı açıklayın. Kullandığınız teoremleri, eğer kullandıysanız, belirtin.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$

A 2 Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a) $\int_0^1 \sin(\log x)dx$

(b) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$

(c) $\oint_{\mathcal{C}}(e^{x^2}-2y)dx+(\log y)dy$, positif yönlü $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,(x-2)^2+(y-1)^2=1\}$.

A 3 Denklemi $2x+y+z+2=0$ olan düzlemi ve denklemi $z=x^2+2y^2$ olan paraboloidi düşünelim.

(a) Bu nesnelerin ayrık olduğunu kanıtlayın.

(b) Bu nesnelerin arasındaki en kısa uzaklığı belirleyin. (İpucu: Paraboloidin teğet düzlemleri cinsinden düşünmek yardımcı olabilir.)

A 4 Aşağıda verilen ifade, $k\le n$ eşitsizliğini sağlayan her $k,n\in\mathbb{N}$ için sağlanmaktadır.

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}. \tag{1}$$

(a) Bu ifadenin

(i) kombinatorik yöntemler kullanarak ve
(ii) cebirsel yöntemler kullanarak

iki ayrı kanıtını verin.

(b) Her $n,r\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayın. (İpucu: (**??**) eşitliğini kullanın.)

BÖLÜM B: Aşağıdaki dört sorudan sadece **iki** tanesini cevaplayın.

B 1 V sonlu boyutlu bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı ve T ise V üzerinde bir doğrusal operatör olsun. Ayrıca $\text{rank}(T^2) = \text{rank}(T)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda T'nin görüntüsü ile T'nin sıfır uzayının ayrık olduğunu kanıtlayın.

B 2 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ kompleks girdileri olan tersinir $n \times n$-matrislerin grubu olsun. M ise bu grubun sonlu mertebeli bir elemanı olsun. Bu durumda M'nin köşegenleştirilebilir olduğunu kanıtlayın.

B 3 G sonlu bir grup, $g \in G$ ise mertebesi en az 3 olan bir eleman ve $C_G(g)$ bu elemanın G içindeki merkezleyeni olsun. Ayrıca $|G : C_G(g)|$'nin tek olduğunu varsayalım. Bu durumda g'nin g^{-1} ile eşlenik olmadığını kanıtlayın.

B 4 G bir grup ve $a \in G$ olsun. a'nın bütün eşlenikleri ile değişmeli olması için gerek ve yeter koşulun a'nın G içindeki bir abelyen normal altgrubun elemanı olması olduğunu kanıtlayın.

BÖLÜM C: Aşağıdaki dört sorudan sadece **iki** tanesini cevaplayın.

C 1 $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ dizisi bir $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsayan sürekli fonksiyonlar dizisi olsun. Aşağıdaki önermelerden herbirisini kanıtlayın ya da çürütün.

(a) Eğer f_n dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, f süreklidir.

(b) Eğer f sürekli ise f_n dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyordur.

C 2 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ bir türevlenebilir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermelerden herbirisini kanıtlayın ya da çürütün.

(a) Eğer f düzgün sürekli ise f' sınırlıdır.

(b) f' sınırlı ise f düzgün süreklidir.

C 3 (M, d) bir metrik uzay, $A \subset M$ boş olmayan bir küme, $x \in A$, ve her $r > 0$ için $B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$ olsun. Aşağıdaki önermelerden herbirisini kanıtlayın ya da çürütün.

(a) Eğer A kapalı ve bazı $r > 0$ için $A \subset B(x,r)$ sağlanıyorsa A tıkızdır.

(b) Eğer A tıkız ise A kapalıdır ve bazı $r > 0$ için $A \subset B(x,r)$ sağlanır.

C 4 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir tam (TAM YERİNE TÜM DÜZLEMDE ANALİTİK DENEBİLİR) fonksiyon olsun.

(a) f'in bazı $R > 0$ için $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ çemberinde M sabitiyle sınırlı olduğunu varsayalım. f'in 0 çevresindeki kuvvet serisi açılımının C_k katsayılarının

$$|C_k| \leq \frac{M}{R^k}$$

eşitsizliğini sağladığını kanıtlayın.

(b) Her $z \in \mathcal{C}$ için $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ eşitsizliğini sağlayan A, B reel sabitlerinin ve $n \geq 0$ tamsayısının var olduğunu varsayalım. f'in derecesi en çok n olan bir polinom olduğunu kanıtlayın. (İpucu: $k > n$ için C_k katsayılarını kontrol etmek için (a)'yı kullanın.)