Boğaziçi Üniversitesi
Matematik Bölümü
Doktora Programı Giriş Sınavı
Saat: 9:00 – 12:00

İsim: ______________________________

BÖLÜM A: Aşağıdaki dört sorudan sadece **üç** tanesini cevaplayın.

A 1 Eğer G grubu S_n grubunun abelyen olmayan basit bir altgrubu ise G'nin A_n'nin içinde olduğunu kanıtlayın.

A 2 R her bir ideali asal olan değişmeli bir halka olsun. Bu durumda R'nin bir cisim olduğunu kanıtlayın.

A 3 R bir halka ve $f : \mathbb{Q} \to R$ ile $g : \mathbb{Q} \to R$ ise birer halka dönüşümü olsun. Eğer $f|_{\mathbb{Z}} = g|_{\mathbb{Z}}$ ise $f = g$ olduğunu kanıtlayın.

A 4 W, girdileri F cisminden olan $n \times n$-matrislerin uzayı ve f ise W üzerinde tanımlı ve her $A, B \in W$ için $f(AB) = f(BA)$ eşitliğini sağlayan doğrusal bir fonksiyonel olsun. Bu durumda f'nin iz fonksiyonelinin bir katı olduğunu kanıtlayın.

BÖLÜM B: Aşağıdaki dört sorudan sadece **üç** tanesini cevaplayın.

B 1

B 2

B 3 m reel doğru üzerindeki Lebesque ölçüsü, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, dm$ olsun. Aşağıdaki önermelerden herbirisini kanıtlayın ya da çürütün. Kullandığınız teoremleri, eğer kullandıysanız, belirtin.

(a) Her $x \in \mathbb{R}$'de F süreklidir.

(b) Her $x \in \mathbb{R}$'de F türevlenebilirdir.

(c) m ölçüsünde hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$'de F türevlenebilirdir.

B 4 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $(f_n)_{n \geq 1}$ ise X üzerinde tanımlı reel değerli ve ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdaki önermelerden herbirisini kanıtlayın ya da çürütün.

(a) Eğer μ ölçüsünde $f_n \to 0$ ise μ ölçüsünde hemen hemen heryerde $f_n \to 0$'dır.

(b) Eğer μ ölçüsünde hemen hemen heryerde $f_n \to 0$ ise μ ölçüsünde $f_n \to 0$'dır.

(c) Eğer $\mu(X) < \infty$ ve μ ölçüsünde hemen hemen heryerde $f_n \to 0$ ise μ ölçüsünde $f_n \to 0$'dır.